Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 06, No. 3(2017), hal 193 – 202.

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS BLOK 2 × 2

Ilhamsyah, Helmi , Fransiskus Fran

INTISARI

Matriks blok merupakan matriks persegi yang diblok dengan memberi garis vertikal dan horizontal sehingga menjadi submatriks dengan ukuran yang lebih kecil. Matriks blok dapat diaplikasikan dalam mencari determinan dan invers dari suatu matriks persegi. Jika suatu matriks persegi yang determinannya tidak sama dengan nol dan memenuhi $AB = BA = I$, dengan A merupakan matriks tak singular maka B merupakan invers dari A. Penelitian ini bertujuan untuk mencari determinan dan invers matriks persegi P dengan menggunakan matriks blok. Langkah pertama untuk mencari invers matriks persegi P yaitu dengan memblok matriks tersebut menjadi matriks berukuran 2×2 dengan submatriks A, B , C dan D. Dengan memisalkan submatriks A dan D dari matiks P merupakan matriks persegi. Selanjutnya mencari determinan dari submatriks A dan $(D - CA^{-1}B)$ atau determinan dari submatriks D dan $(A - BD^{-1}C)$. Jika determinan dari matriks A dan D sama dengan nol maka matriks P diblok ulang dengan submatriks B dan C merupakan matriks persegi. Kemudian dicari determinan dan invers dari submatriks B dan $\left(C - DB^{-1}A\right)$ atau determinan dari submatriks C dan $\left(B - AC^{-1}D\right)$. Setelah didapat invers dari matriks A, B, C atau D dicari invers dari matriks P dengan menggunakan teorema Komplemen Schur sehingga didapat P^{-1}. Hasil penelitian ini menunjukan bahwa matriks taksingular dapat dicari determinan dan inversnya dengan cara memblok matriks tersebut menjadi matriks yang lebih kecil dengan salah satu dari submatriks P memiliki determinan yang tidak sama dengan nol.

***Kata kunci**: determinan matriks, invers matriks dan komplemen schur*

PENDAHULUAN

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu Aljabar Linear yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu Matematika. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan (real atau kompleks) yang berbentuk persegi panjang dan disusun berdasarkan aturan baris dan kolom. Selanjutnya bilangan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Entri dari matriks A yang berada pada baris ke-i dan kolom ke-j dinotasikan dengan a_{ij}[1].

Jenis-jenis matriks diantaranya matriks persegi, matriks nol, matriks identitas, matriks segitiga, matriks diagonal, matriks baris, matriks kolom dan lain sebagainya. Matriks-matriks tersebut ada yang dapat dicari inversya dan ada juga yang tidak dapat dicari inversnya. Matriks yang dapat dicari inversnya adalah matriks persegi yang memiliki determinan tidak sama dengan nol dan memenuhi $AB = BA = I$, dengan A yang memiliki invers dan B disebut sebagai invers dari A. Sedangkan matriks yang tidak memiliki invers yaitu matriks yang memiliki determinan sama dengan nol[2].

Matriks blok merupakan matriks yang diperoleh dengan membagi matriks menjadi beberapa submatriks yang ukurannya lebih kecil dengan cara memasukkan garis horizontal diantara baris-baris dan vertikal diantara kolom-kolom matriks. Matriks blok digunakan untuk menyederhanakan matriks yang ukurannya besar menjadi kecil sehingga lebih mudah dioperasikan untuk tujuan tertentu, salah satunya yaitu untuk mencari determinan dan invers matriks. Untuk menentukan determinan dari suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode seperti Metode Kofaktor, Metode Sarrus dan Komplemen Schur. Sedangkan untuk menentukan invers dari suatu matriks dapat menggunakan

Metode Adjoin, Eliminasi Gauss dan Gauss Jordan, Dekomposisi Crout dan Komplemen Schur. Untuk menentukan determinan dan invers matriks blok digunakan metode Komplemen Schur[2].

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mencari determinan dan invers matriks $n \times n$ dengan menggunakan sifat-sifat blok matriks. Dalam mencari determinan dan invers matriks dimulai dari memblok matriks P menjadi matriks blok 2×2 sehingga didapat submatriks A, B, C dan D. Kemudian mencari determinan dari sub Matriks A, jika $\det(A) \neq 0$, maka dicari invers dari matriks A. Setelah itu dicari determinan dari submatriks $(D - CA^{-1}B)$. Jika determinan dari submatriks $(D - CA^{-1}B) \neq 0$, maka dicari invers dari submatriks $(D - CA^{-1}B)$. Kemudian dicari invers dari matriks P dengan menggunakan teorema komplemen *schur*.

MATRIKS BLOK

Definisi 1 [3] *Matriks blok atau matriks partisi adalah matriks yang dipartisi atau diblok menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil dengan memasukkan garis horizontal dan vertikal antara baris dan kolom matriks. Matriks-matriks yang ukurannya kecil hasil partisi matriks disebut submatriks.*

Matriks blok yang dibahas adalah matriks persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2×2.
Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut :
misalkan P merupakan suatu matriks $m \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(n-k)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kemudian diberi garis horizontal dan vertikal sehingga menjadi matriks seperti berikut :

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{(m-k)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(n-k)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

dengan memisalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(m-k)(k-1)} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1)1} & \cdots & a_{(m-(k-1)(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1)(n-(k-1)} & \cdots & a_{m-(k-1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1)} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Dalam mencari determinan dan invers matriks blok, digunakan teorema-teorema kompleman Schur. Komplemen Schur merupakan salah satu metode atau cara dalam analisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks. Dalam teori tentang matriks, komplemen Schur biasanya digunakan pada matriks $n \times n$ dengan n lebih besar atau sama dengan tiga.

DETERMINAN MATRIKS BLOK

Berikut ini dipaparkan mengenai determinan matriks persegi dengan menggunakan matriks blok:

Teorema 2 [4] *Jika A dan B merupakan matriks $n \times n$ maka*

(i) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(ii) $\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$ *jika A dan D merupakan matriks persegi*

Teorema 3 [4] *Jika P merupakan matriks $n \times n$ dan $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ maka determinan dari P adalah*

$$\det(P) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} det(A).det(D - CA^{-1}B)\ jika\ A \text{ memiliki invers} \\ det(D).de\,t(A - BD^{-1}C)\ jika\ D \text{ memiliki invers.} \end{cases}$$

Lemma 4 Misalkan J merupakan matriks blok $n \times n$ dengan entri 1 pada diagonal keduanya dan 0 untuk yang lain,yaitu

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \iddots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } \det(J) = (-1)^{\frac{1}{2}(n)(n-1)}.$$

Matriks J pada pada Lemma 4 disebut juga dengan matriks diagonal kedua, matriks J memiliki sifat

$$JJ = I \text{ dan } JJ^T = I \text{ sehingga}$$
$$P = J(PJ)^T.$$

Jika submatriks A dan D pada matriks P tidak memiliki invers maka dengan memanfaatkan Lemma 4 dapat digunakan teorema berikut dalam mencari determinan dari matriks P .

Teorema 5 *Jika P merupakan matriks $n \times n$ serta B atau C merupakan matriks $p \times p$ atau $q \times q$ maka:*

(i) $\det \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \det(B) \cdot \det(C)$

(ii) $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \cdot \det(B)\det(C - DB^{-1}A), & jika\ B\ memiliki\ invers. \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \cdot \det(C)\det(B - AC^{-1}D) & jika\ C\ memiliki\ invers. \end{cases}$

INVERS MATRIKS BLOK

Kemudian dibahas mengenai teorema yang digunakan untuk mencari invers dari matriks persegi dengan menggunakan blok matriks, sebelum membahas invers matriks blok persegi, dibahas terlebih dahulu mengenai invers matriks diagonal dan segitiga.

Teorema 6 [5] *Jika P merupakan matriks persegi, maka*

(i) *Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.*

(ii) *Untuk matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.*

Matriks segitiga adalah matriks persegi yang semua entri di atas diagonal pertamanya adalah nol di sebut matriks segitiga bawah dan sebaliknya matriks persegi yang semua entri di bawah diagonal pertamanya adalah nol di sebut matriks segitiga atas. Untuk menentukan invers dari matriks blok segitiga maka diberikan teorema sebagai berikut.

Teorema 7 [5]*Jika P merupakan matriks persegi, maka*

(i) *Untuk matriks P =* $\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}$*akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers dan* $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$.

(ii) *Untuk matriks P=*$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$*akan memiliki matriks invers jika dan hanya jika A dan D memiliki invers dan* $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

Kemudian akan dibahas mengena invers dari matriks blok yang mana semua entri dari matriksnya merupakan bilangan real.

Teorema 8 [5] *Misalkan P merupakan matriks persegi:*

(i) *Diasumsikan submatriks A pada matriks P dalam persamaan 1 adalah tak singular. Matriks P pada persamaan 1 punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari A punya invers dan* $(D - CA^{-1}B)$ *juga memiliki invers didapat*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

(ii) *Diasumsikan submatriks D pada matriks P dalam persamaan 1 adalah tak singular. Matriks P pada persamaan 1 punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari D punya invers dan* $(A - BD^{-1}C)$ *juga memiliki invers maka didapat*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-}C)^{-1} & -(A - BD^{-}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}.$$

Setelah didapat invers untuk matriks P dengan submatriks A atau D yang memiliki invers, maka selanjutnya akan diberikan teorema yang untuk mencari P^{-1} dengan B atau C yang memiliki invers.

Teorema 9 [5] *Misalkan P merupakan matriks persegi:*

(i) *Diasumsikan matriks B pada matriks P dalam persamaan 1 adalah tak singular. Matriks P pada persamaan 1 punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari B punya invers dan* $(C - DB^{-1}A)$ *juga memiliki invers maka didapat*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}$$

(ii) *Diasumsikan matriks* C *pada matriks P dalam persamaan 1 adalah tak singular. Matriks P pada persamaan 1 punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari* C *punya invers dan* $(B - AC^{-1}D)$ *juga memiliki invers maka didapat*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$$

selanjutnya akan dibahas lebih lanjut mengenai matriks yang berbentuk

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{atau} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 10 [5] *Jika P merupakan matriks persegi, maka*

(i) *Untuk matriks* $P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ *akan memiliki invers jika dan hanya jika submatiks* B *dan* C *memiliki invers dan invers matriks* $P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

(ii) *Untuk matriks* $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ *akan memiliki invers jika dan hanya jika submatiks* B *dan* C *memiliki invers dan invers matriks* $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$

Setelah diketahui teorema menganai invers pada matriks persegi, selanjutnya akan dibahas invers pada matriks yang berentri kompleks yaitu matriks Hermit dan Matriks Hermit miring. Suatu matriks A dengan ordo $n \times n$ serta memiliki entri-entri kompleks dengan matriks A sama dengan transpos konjugat dari A dan disimbolkan dengan A^* maka matriks A disebut Hermit. Sedangkan Suatu matriks bujur sangkar A dengan entri-entri kompleks disebut Hermit-miring (skew-hermit) jika $-A = A^*$. Selanjunya akan dibahas mengenai invers dari matriks blok Hermit dan Hermit miring.

Teorema 11 [5] *Misalkan P merupakan matriks persegi:*

P merupakan matriks Hermit jika dan hanya jika $P = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & D \end{bmatrix}$ *dimana A dan D Hermit, maka inversnya dapat ditulis*

(i) $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} - A^{-1}BG & -A^{-1}BH \\ -HB^*CA^{-1} & (D - B^*A^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$, *atau*

(ii) $P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-}B^*)^{-1} & -EBD^{-1} \\ -D^{-1}B^*E & D^{-1} + D^{-1}B^*F \end{bmatrix}$

Teorema 12 [5] *Misalkan P merupakan matriks persegi:*

P merupakan matriks Hermit miring jika dan hanya jika $P = \begin{bmatrix} A & B \\ -B^* & D \end{bmatrix}$*, jika A dan D Hermit miring dengan memisalkan* $-B^* = B^H$*, maka inversnya dapat ditulis:*

(i) $P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BHB^HA^{-1} & -A^{-1}BH \\ -HB^HA^{-1} & (D - B^HA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$, *atau*

(ii) $P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}B^H)^{-1} & -EBD^{-1} \\ -D^{-1}B^HE & D^{-1} + D^{-1}B^HEBD^{-1} \end{bmatrix}$

Contoh 13 Akan dari invers dari matriks berikut

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian dengan menggunakan Teorema 7

1. Blok mattriks P menjadi matriks blok 2×2

$$P = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

Misalkan

$$A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\-2&4&2\\2&-2&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&2\\0&2\\-2&0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0&4&2\\4&2&2\end{bmatrix}, \text{dan } D=\begin{bmatrix}4&4\\4&-1\end{bmatrix}$$

2. Dicari determinan dari submatriks matriks A

$$A=\begin{bmatrix}2&0&-1\\-2&4&2\\2&-2&2\end{bmatrix}$$

blok matriks A menjadi matriks 2×2

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}2&0&-1\\-2&4&2\\\hline 2&-2&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}K&L\\M&N\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}2&0\\-2&4\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}, M=\begin{bmatrix}2&-2\end{bmatrix} \text{ dan } N=[2]$$

kemudian dicari determinan dan invers dari submatriks K

$$\det(K)=\det\begin{bmatrix}2&0\\-2&4\end{bmatrix}=8 \text{ dan invers dari } K=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

Setelah didapat invers dari matriks K kemudian dicari determinan dari matiks A.

$$\det(A)=\det(K)\cdot\det(N-MK^{-1}L)$$

$$\det(A)=8\cdot\det\left([2]-\begin{bmatrix}2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right)=28$$

Karena $\det(A)\neq 0$, maka submatriks A memiliki invers.

3. Dicari invers dari submatriks A dan determinan dari $(D-CA^{-1}B)$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}K^{-1}+K^{-1}L(N-MK^{-1}L)^{-1}MK^{-1} & -K^{-1}L(N-MK^{-1}L)^{-1}\\-(N-MK^{-1}L)^{-1}MK^{-1} & (N-MK^{-1}L)^{-1}\end{bmatrix}$$

Misalkan submatriks dari$A^{-1}=\begin{bmatrix}E'&F'\\G'&H'\end{bmatrix}$, didapat

$$H'=(N-MK^{-1}L)^{-1}=\left([2]-\begin{bmatrix}2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right)^{-1}=\left[\frac{2}{7}\right]$$

$$F'=-K^{-1}L(N-MK^{-1}L)^{-1}=-K^{-1}LH'=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}\\-\frac{1}{14}\end{bmatrix}$$

$$G'=-(N-MK^{-1}L)^{-1}MK^{-1}=-H'MK^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

$$E'=K^{-1}+K^{-1}L(N-MK^{-1}L)^{-1}MK^{-1}=K^{-1}-K^{-1}LG'=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}&\frac{1}{14}\\\frac{2}{7}&\frac{3}{14}\end{bmatrix}$$

Karena $A^{-1} = \begin{bmatrix} E' & F' \\ G' & H' \end{bmatrix}$, maka $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

Setelah didapat A^{-1}, kemudian dicari determinan dari matriks $(D - CA^{-1}B)$

$$\det(D - CA^{-1}B) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$CA^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{8}{7} & \frac{2}{7} \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{10}{7} & 1 \\ \frac{9}{7} & 1 \\ -\frac{8}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \det(D - CA^{-1}B) = -8$$

4. Karena $\det(D - CA^{-1}B) = -8$ artinya $\det(D - CA^{-1}B) \neq 0$ sehingga $(D - CA^{-1}B)$ memiliki invers.

$$H = (D - CA^{-1}B)^{-1} = \frac{1}{\det(D - CA^{-1}B)} adj(D - CA^{-1}B) = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 2 & \frac{8}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

5. Kemudian dicari invers dari matriks P

Misalkan $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

karena telah didapat $(D - CA^{-1}B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$, dan $H = (D - CA^{-1}B)^{-1}$ sehingga

$$H = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$F = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} = -A^{-1}BH = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{7} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{7} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$G = -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} = -HCA^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$E = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BG = \begin{bmatrix} 1 & \frac{15}{14} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{15}{14} & \frac{1}{28} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Dari (2), (3),(4), dan (5) didapat

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{15}{14} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{15}{14} & \frac{1}{28} \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{7} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{7} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}, \text{dan } H = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{15}{14} & \frac{2}{7} & -1 & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{4} & \frac{15}{14} & \frac{1}{28} & -\frac{7}{8} & \frac{1}{7} \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Contoh 14 Invers Matriks Hermit

Tertukan invers dari matriks Hermit berikut

$$P = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian menggunakan Teorema 10

1. Blok matriks P menjadi matriks blok 2×2 sehingga

$$P = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ \hline 1-i & 2+i & 3 \end{array}\right]$$

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2+i \\ 2-i \end{bmatrix}, B^* = [1-i \quad 2+i]$ dan $D = [3]$

2. Mencari invers dari matriks A dengan menggunakan adjoin

$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & -5 \end{bmatrix}$ sehingg didapat $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{i}{6} \\ -\frac{i}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

3. Mencari invers dari matriks $(D - B^*A^{-1}B\ )$ dimana $(D - B^*A^{-1}B)^{-1} = H$

$$H = (D - B^*A^{-1}B)^{-1} = \left[\tfrac{6}{7}\right] \tag{6}$$

4. Mencari matriks F dimana $F = -A^{-1}BH$

$$F = -A^{-1}BH = \begin{bmatrix} -\frac{6}{7}-i \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} \tag{7}$$

5. Mencari matriks G dimana $G = -HB^*A^{-1}$

$$G = -HB^*A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{7}+i & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \tag{8}$$

6. Mencari matriks E dimana $E = A^{-1} - A^{-1}BG$

7. $E = A^{-1} - A^{-1}BG = \begin{bmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$. (9)

Dari (6), (7), (8), dan (9) didapat

$$E = \begin{bmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} -\frac{6}{7}\text{-}i \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -\frac{6}{7}+i & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \end{bmatrix}$$

sehingga $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{6}{7} - i \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{6}{7} + i & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$.

PENUTUP

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan, maka dapat ditarik kesimpulan, yaitu: diberikan matriks P berordo $n \times n$, kemudian matriks P diblok menjadi matirks 2×2

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

1. Determinan matriks $n \times n$ dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   Misalkan submatriks A dan D atau B dan C merupakan matriks persegi, Jika A dan D merupakan matriks persegi, maka dicari determinan dan invers submatriks A atau D sehingga didapat determianan matriks P yaitu $\det(P) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$ jika $\det(A) \neq 0$ atau $\det(P) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$ jika $\det(D) \neq 0$. Jika B dan C merupakan matriks persegi, maka dicari determinan dan invers submatriks B atau C sehingga didapat determianan matriks P yaitu
   $\det(P) = (-1)^{\left(\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)\right)}\det(B)\det(C - AB^{-1}D)$ atau
   $\det(P) = (-1)^{\left(\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)\right)}\det(C)\det(B - DC^{-1}A)$
2. Invers dari matriks P dapat ditentukan dengan memisalkan submatriks A, B, C atau D memiliki invers atau determinannya tidak sama dengan nol
   Misalkan $P^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$. Entri dari submatriks $E,\ F, G,$ dan H dapat dicari jika:
   i) submatriks A memiliki invers dan submatriks $H = D - CA^{-1}B$ memiliki invers maka
   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix},$$
   ii) submatriks D memiliki invers dan submatriks $E = A - BD^{-1}C$ mamiliki invers maka
   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-}C)^{-1} & -(A - BD^{-}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix},$$
   iii) submatriks B memiliki invers dan submatriks $F = C - DB^{-1}A$ memiliki invers, maka
   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ B^{-1} + B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}A(C - DB^{-1}A)^{-1} \end{bmatrix}, \text{ dan}$$
   iv) submatriks C memiliki invers dan $G = B - AC^{-1}D$ memiliki invers maka
   $$P^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1} & C^{-1} + C^{-1}D(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & -(B - AC^{-1}D)^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}.$$

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Pudjiastuti. *Matriks Teori dan Aplikasi*. Yokyakarta:Graha Ilmu; 2006.
[2]. Anton, H., dan Rorres, C. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Jilid 1*. Edisi Kedelapan. Jakarta: Erlangga; 2004
[3]. Supranto, J. *Pengantar Matrix*. Jakarta:Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia; 1993
[4]. Meyer, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Siam: Philadelphia; 2000
[5]. Lu, T. T and Shio, S. S. Inverses of 2×2 Block Matrices. Computers and Mathematics with Applications, 2002; volume 43, hal 119-129

Ilhamsyah : FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, ilhamsyah.2010@gmail.com
Helmi : FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, helmi132205@yahoo.co.id
Fransiskus Fran : FMIPA Universitas Tanjungpura, Pontianak, frandly88@gmail.com